

Operaciones con polinomios

Sean los siguientes polinomios:

$$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 2$$

$$Q(x) = -3x^3 + 2x^2 - 5x + 3$$

$$R(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x - 3$$

Realizar las siguientes operaciones:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

c) $P(x) + R(x)$

d) $P(x) - R(x)$

e) $Q(x) + R(x)$

f) $Q(x) - R(x)$

Dados los polinomios $P(x,y) = 3x^2y - 2x^3y^2$; $Q(x,y) = 2x^2y^3 - 5x^3y^2 + 3x^2y$

Calcula $P(x,y) + Q(x,y)$ y $P(x,y) - Q(x,y)$

Sean los polinomios

$$P(x) = 3x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 2$$

$$Q(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$$

$$R(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x - 3$$

Realiza las siguientes operaciones:

a) $P(x) \cdot Q(x)$

b) $P(x) \cdot R(x)$

c) $Q(x) \cdot R(x)$

Efectúa las operaciones y simplifica las siguientes expresiones:

a) $x \cdot (x^2 + 1) - 3x \cdot (-x + 3) + 2 \cdot (x^2 - x)^2$

b) $2 \cdot (x^2 + 3) - 2x \cdot (x - 3) + 6 \cdot (x^2 - x - 1)$

c) $-4x \cdot (x - 4)^2 + 3 \cdot (x^2 - 2x + 3) - 2x \cdot (-x^2 + 5)$

d) $-3x \cdot (x + 7)^2 + (2x - 1) \cdot (-3x + 2)$

e) $(2a^2 + a - 1) \cdot (a - 3) - (2a - 1) \cdot (2a + 1)$

f) $(3b - 1) \cdot (3b + 1) - (4b - 3)^2 - 2 \cdot (2b^2 + 16b - 16)$

Dados los polinomios

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 4$$

$$Q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 2$$

Se pide, calcular:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

c) $3 \cdot P(x)$

d) $3 \cdot P(x) - 2 \cdot Q(x)$

e) $P(x) \cdot Q(x)$

Calcular los productos:

a) $(3x^2 - 7x + 5) \cdot (x^2 - x + 1)$

b) $(x^3 - x) \cdot (x^2 - 1)$

c) $(x^3 - 3x^2 - 2) \cdot (x^2 + 1)$

Hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(3x^2 - 7x + 5) : (x^2 - x + 1)$

b) $(x^3 - x) : (x^2 - 1)$

c) $(x^3 - 3x^2 - 2) : (x^2 + 1)$

d) $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) : (x^3 + 2x)$

e) $(x^3 - 5x^2 + x) : (x^2 - 1)$

f) $(2x^3 - 6x^2 + x) : (2x^2 - 1)$

Aplica la Regla de Ruffini para hacer las divisiones

a) $(2x^3 - 4x^2 + 2x + 1) : (x + 1)$

b) $(5x^4 + 6x^2 - 11x + 13) : (x - 2)$

c) $(6x^5 - 3x^4 + 2x) : (x + 1)$

d) $(3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 2x + 13) : (x - 4)$

e) $(6x^4 + 4x^3 - 51x^2 - 3x - 9) : (x + 3)$

Comprueba si los polinomios:

a) $P(x) = 7x^4 - 5x^2 + 2x - 4$

b) $Q(x) = 3x^3 - 8x^2 + 3x$

c) $R(x) = x^5 + 2x^4 - x - 2$

son divisibles entre $(x - 1)$, $(x + 3)$, $(x + 1)$

Teorema del Resto. Raíces de un polinomio

Dado el polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$, calcula el resto al dividirlo por $x + 2$. Utiliza el Teorema del Resto y compruébalo haciendo la división por Ruffini

Calcula "m" para que el polinomio $x^3 - mx^2 + 5x - 2$ sea divisible por $x + 1$

Dado el polinomio $2x^4 + kx^3 - 7x + 6$, determina k para que al dividirlo por $x - 2$ obtengamos de resto - 8

Determina "m" para que el polinomio $mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$ sea divisible por $(x + 2)$

a) Si la división $P(x) : (x + 2)$ es exacta, ¿qué puedes decir del valor $P(-2)$?

b) Si 3 es una raíz de $P(x)$, ¿qué puedes afirmar de la división $P(x) : (x - 3)$?

c) ¿En qué te has basado para responder a las preguntas anteriores?

Averigua cuáles de los números 1, - 1, 2, - 2, 3 y - 3 son raíces de los polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 7x - 6$

c) $R(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$

b) $Q(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$

d) $S(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6$

Calcular las raíces de los polinomios siguientes:

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

e) $T(x) = 4x^3 + 8x^2 - x - 2$

b) $Q(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$

f) $U(x) = x^3 - 1$

c) $R(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

d) $S(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

Factorización

Factorizar los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 3x^2 + 30x + 75$

b) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$

c) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3$

d) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

e) $P(x) = x^4 - x^2$

f) $P(x) = x^4 - 1$

g) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x$

h) $P(x) = x^5 + 8x^4 + 21x^3 + 18x^2$

i) $P(x) = 10x^4 - 3x^3 - 41x^2 + 12x + 4$

j) $P(x) = 9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3$

k) $P(x) = x^5 + 10x^4 + 32x^3 + 40x^2 + 31x + 30$

a) Escribe un polinomio de segundo grado que tenga sólo la raíz 3

b) Escribe un polinomio de segundo grado que no tenga raíces

c) Escribe un polinomio que tenga por raíces 2, 3 y -1.

d) Escribe un polinomio de tercer grado que sólo tenga una raíz.

e) Escribe un polinomio de segundo grado que tenga una raíz igual a 3, y que además cumpla que $P(5) = 6$

Si $P(x) = (x - 2)^2 \cdot x^2$, busca un polinomio de tercer grado $Q(x)$ que cumpla las dos condiciones siguientes:

a) m.c.d. $[P(x), Q(x)] = x^2 - 2x$

b) m.c.m. $[P(x), Q(x)] = (x - 2)^2 \cdot x^2 \cdot (x + 5)$

Decide cuál de los siguientes polinomios son irreducibles:

a) $P(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $P(x) = 3x^2 + 5x$

c) $P(x) = 3x^2 - 5x + 3$

Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de cada pareja de polinomios:

a) $P(x) = x^2 - 9$ y $Q(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$ y $Q(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2$

c) $P(x) = x \cdot (x - 3)^2 \cdot (x + 5)$ y $Q(x) = x^3 \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + x + 2)$

Fracciones algebraicas

Simplifica las fracciones:

a) $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$

b) $\frac{x + 4}{x^2 + x - 12}$

c) $\frac{2 - x^2 - x^3}{1 - x^2}$

d) $\frac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}$

Recuerda las igualdades notables, descompón en factores y simplifica:

a) $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$

b) $\frac{x^2 - 4}{(x + 2)^2}$

c) $\frac{9x^2 - 4}{3x - 2}$

d) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$

e) $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 25 - 10x}$

f) $\frac{x \cdot (x + 1)}{x^2 + 2x + 1}$

g) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$

h) $\frac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$

Reducir a común denominador:

a) $\frac{3x - 1}{x}; \frac{x + 3}{x^2 - 2x}; \frac{2x + 5}{x - 2}$

b) $\frac{x + 7}{x}; \frac{x - 2}{x \cdot (x + 1)}; \frac{2x - 1}{x + 1}$

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{x}{3} - \frac{2}{x} + 1$

b) $\frac{x - 2}{3} \cdot \frac{x + 2}{3}$

c) $\frac{1}{x - 1} : \frac{x + 1}{x}$

d) $\frac{x + 2}{3x^2} - \frac{1}{6x}$

e) $\frac{x}{x - 1} + \frac{3}{x}$

f) $\frac{3}{x^2} - \frac{x + 2}{5x}$

g) $\frac{x - 2}{x + 3} - \frac{2}{3x}$

h) $\frac{5}{x^2} - \frac{3x - 1}{x + 1}$

i) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2} \cdot \frac{x - 3}{x + 1}$

j) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2} : \frac{x - 3}{x + 1}$

k) $\frac{x^2 + 2}{4x^2} - \frac{x + 1}{3x}$

l) $\frac{5}{x^2 - 4} : \frac{10x}{x + 2}$