Matemáticas 1º BACH CIENCIAS *"Números Complejos"*	Tema	SEMANA 16-20 MARZO
Nombre:		

Ejercicio nº 1.-

1. Dados $z_1 = -3+4i$, $z_2 = 5-2i$, $z_3 = \frac{3}{2}$ y $z_4 = 7i$, calcular:

a) $(z_1 - z_2)z_3$ **b)** $z_1 z_4 + z_3 z_4$ **h)** $z_1^2 z_3$ **i)** $\frac{z_2}{z_1}$ **j)** $\frac{z_1}{2z_3 + z_4}$

Solución

a) Para calcular $(z_1 - z_2)z_3$, en primer lugar se calcula la operación del paréntesis y a continuación se multiplica el resultado por z_3:

$$(z_1 - z_2)z_3 = \left(-3+4i - (5-2i)\right)\frac{3}{2} = \left(-3-5+(4+2)i\right)\frac{3}{2} = (-8+6i)\frac{3}{2} = -12+9i$$

b) En primer lugar se calculan $z_1 z_4$ y $z_3 z_4$ para después sumar los resultados:

$$z_1 z_4 = (-3+4i)\,7i = -21i+28i^2 = -28-21i$$

$$z_3 z_4 = \frac{3}{2}\,7i = \frac{21}{2}i$$

$$z_1 z_4 + z_3 z_4 = -28-21i + \frac{21}{2}i = -28 - \frac{21}{2}i$$

Notar que otra forma de obtener este resultado es sacar factor común z_4 quedando:

$$z_1 z_4 + z_3 z_4 = (z_1 + z_3)z_4 = \left(-3 + 4i + \frac{3}{2}\right)7i = \left(\frac{-3}{2} + 4i\right)7i = \frac{-21}{2}i + 28i^2 = -28 - \frac{21}{2}i$$

h) $z_1^2 z_3 = (-3+4i)^2\frac{3}{2} = (9-24i+16i^2)\frac{3}{2} = (9-24i-16)\frac{3}{2} = (-7-24i)\frac{3}{2} = \frac{-21}{2} - 36i$

i) Se efectúa el cociente multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5-2i}{-3+4i} = \frac{(5-2i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \frac{-15-20i+6i+8i^2}{9-16i^2} = \frac{-15-14i-8}{9+16} = \frac{-23-14i}{25} = \frac{-23}{25} - \frac{14}{25}i$$

j) En primer lugar se calcula el denominador

$$2z_3 + z_4 = 2\frac{3}{2} + 7i = 3+7i$$

y, multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, el cociente queda:

$$\frac{z_1}{2z_3 + z_4} = \frac{-3+4i}{3+7i} = \frac{(-3+4i)(3-7i)}{(3+7i)(3-7i)} = \frac{-9+21i+12i-28i^2}{9-49i^2} = \frac{-9+33i+28}{9+49} = \frac{19+33i}{58} = \frac{19}{58} + \frac{33}{58}i$$

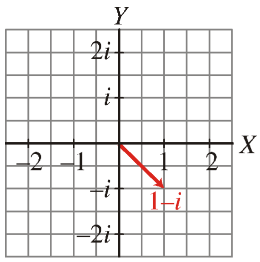
Ejercicio nº 2.- **Calcula y representa gráficamente la solución que obtengas:**

$$\frac{(3-i)i^3}{1-2i}$$

$$\frac{(3-i)i^3}{1-2i}=\frac{(3-i)(-i)}{1-2i}=\frac{-3i+i^2}{1-2i}=\frac{-3i-1}{1-2i}=\frac{-1-3i}{1-2i}=\frac{(-1-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{-1-2i-3i-6i^2}{1-4i^2}=$$

$$=\frac{-1-2i-3i+6}{1+4}=\frac{5-5i}{5}=\frac{5}{5}-\frac{5i}{5}=1-i$$

Representación gráfica:



Ejercicio nº 3.-

Dado el número complejo $z=\sqrt{3}-i$:

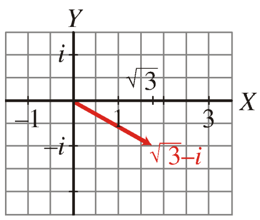
Represéntalo gráficamente y exprésalo en forma polar.

Forma polar:

$$|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

$$tg\,\alpha=\frac{-1}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{3}\quad\rightarrow\quad\alpha=330^\circ \text{ (pues está en el 4.º cuadrante)}$$

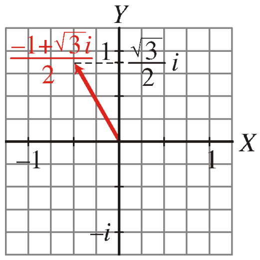
Por tanto: $z=2_{330^\circ}$



Ejercicio nº 4.-

Calcula el valor de z^6, sabiendo que $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

Expresamos z en forma polar:



$$|z| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \alpha = 120^\circ \text{ (pues está en el 2.º cuadrante)}$$

Por tanto: $z = 1_{120^\circ}$

Así, calculamos z^6:

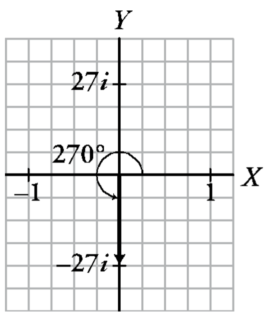
$$z^6 = \left(1_{120^\circ}\right)^6 = 1_{720^\circ} = 1_{0^\circ} = 1$$

Ejercicio nº 5.- Calcula e interpreta gráficamente las soluciones:

$\sqrt[3]{-27i}$

Expresamos $-27i$ en forma polar:

$$-27i = 27_{270^\circ}$$



Así:

$$\sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270^\circ}} = \sqrt[3]{27}_{\frac{270^\circ+360^\circ k}{3}} \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2$$

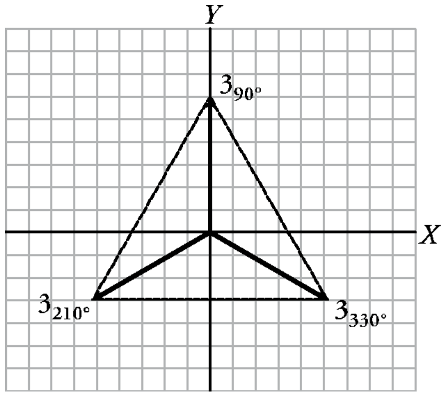
Las tres raíces son:

$$k = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{27_{90^\circ}} = 3_{90^\circ} = 3i$$

$$k = 1 \quad \rightarrow \quad 3_{210^\circ} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$k = 2 \quad \rightarrow \quad 3_{330^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

Interpretación gráfica:



Los afijos de las tres raíces cúbicas ocupan los vértices de un triángulo equilátero.

Ejercicio nº 6.- **Resuelve la ecuación:**

$z^2 - 4z + 5 = 0$

$z^2 - 4z + 5 = 0$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

Hay dos soluciones: $z_1 = 2 + i; \quad z_2 = 2 - i$

Ejercicio nº 7.-**Calcula:**

7. Determinar el módulo, el argumento, la forma polar y la forma trigonométrica de los siguientes números complejos:

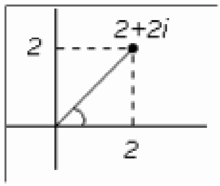
a) $2+2i$ **b)** $-2+2i$ **c)** $2-2i$ **d)** $-2-2i$ **e)** $-\sqrt{5}$ **f)** $\frac{5}{3}i$ **g)** $\sqrt{3}+i$

Solución

En todos los apartados se representa el número complejo para ayudar a determinar su argumento.

a) El módulo y el argumento de $2+2i$ son:

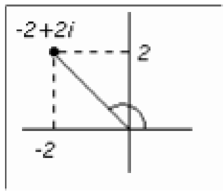
$$|2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\arg(2+2i) = \text{arctg}\frac{2}{2} = \text{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$$



Por tanto, la forma polar de $2+2i$ es $(2\sqrt{2})_{\pi/4}$ y la forma trigonométrica $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

b) El módulo y el argumento de $-2+2i$ son:

$$|-2+2i| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\arg(-2+2i) = \text{arctg}\frac{2}{-2} = \text{arctg}\,(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

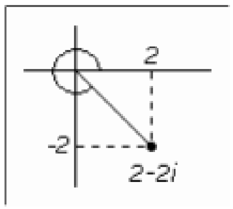


Por tanto, la forma polar y trigonométrica de $-2+2i$ son, respectivamente:

$$|-2+2i| = (2\sqrt{2})_{3\pi/4} \qquad |-2+2i| = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$$

c) El módulo y el argumento de $2-2i$ son:

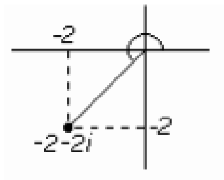
$$|2-2i| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\arg(2-2i) = \text{arctg}\frac{-2}{2} = \text{arctg}\,-1 = \frac{7\pi}{4}$$



Por tanto, la forma polar de $2-2i$ es $(2\sqrt{2})_{7\pi/4}$ y la forma trigonométrica $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

d) El módulo y el argumento de $-2-2i$ son:

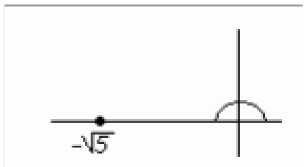
$$|-2-2i| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\arg(-2-2i) = \operatorname{arctg}\frac{-2}{-2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{5\pi}{4}$$



Por tanto, la forma polar de $-2-2i$ es $(2\sqrt{2})_{5\pi/4}$ y la forma trigonométrica $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$.

e) De la figura se concluye de forma inmediata que el módulo y el argumento de $-\sqrt{5}$ son:

$$|-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$$
$$\arg(-\sqrt{5}) = \pi$$

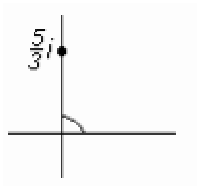


Por tanto, la forma polar de $-\sqrt{5}$ es $\sqrt{5}_{\pi}$ y la forma trigonométrica $\sqrt{5}\,(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$

f) De la figura se concluye de forma inmediata que el módulo y el argumento de $\frac{5}{3}i$ son:

$$\left|\frac{5}{3}i\right| = \frac{5}{3}$$

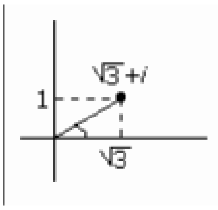
$$\arg\left(\frac{5}{3}i\right) = \frac{\pi}{2}$$



Por tanto, la forma polar de $\frac{5}{3}i$ es $\left(\frac{5}{3}\right)_{\pi/2}$ y la forma trigonométrica $\frac{5}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

g) El módulo y el argumento de $\sqrt{3}+i$ son:

$$|\sqrt{3}+i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$\arg(\sqrt{3}+i) = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$



Por tanto, la forma polar y trigonométrica de $\sqrt{3}+i$ son, respectivamente:

$$\sqrt{3}+i = 2_{\pi/6} \qquad\qquad \sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$

Ejercicio nº 8.-

Halla dos números complejos tales que su producto sea 8*i*, la diferencia de argumentos $\frac{\pi}{6}$ y la suma de sus módulos, 6.

Trabajamos con la forma polar de los números complejos y los llamamos r_α y s_β.

$$r_\alpha \cdot s_\beta = 8i \;\rightarrow\; r_\alpha \cdot s_\beta = 8_{\frac{\pi}{2}} \qquad \begin{cases} r \cdot s = 8 \\ \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Además, $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{6}$ y $r + s = 6$.

Hallamos sus módulos:

$$\left.\begin{array}{l} r \cdot s = 8 \\ r + s = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow (6-s)s = 8 \;\rightarrow\; s^2 - 6s + 8 = 0 \;\rightarrow\; s = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2} \\ \rightarrow r = 6 - s \end{array} \qquad \begin{array}{l} s = 2 \;\rightarrow\; r = 4 \\ s = 4 \;\rightarrow\; r = 2 \end{array}$$

Hallamos sus argumentos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2} \\ \alpha - \beta = \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right\} \rightarrow\; 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \;\rightarrow\; 2\alpha = \frac{4\pi}{6} \;\rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} = 30°$$

Las soluciones buscadas son:

$$z_1 = 4_{60°},\; z_2 = 2_{30°};\; z_1' = 2_{60°},\; z_2' = 4_{30°}$$

Ejercicio nº 9.-

Halla los números complejos *z* y *w* que verifican el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{2z + w = 7 + 2i} \\ \mathbf{(2+i)\,z + 2iw = -3 + 6i} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2z + w = 7 + 2i \\ (2+i)\,z + 2iw = -3 + 6i \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow\ w = 7 + 2i - 2z \\ \rightarrow\ (2+i)\,z + 2i(7 + 2i - 2z) = -3 + 6i\ \rightarrow \end{array}$$

$$\rightarrow 2z + iz + 14i + 4i^2 \updownarrow 4zi = \updownarrow 3 + 6i \quad 2z \updownarrow 3zi = \updownarrow 3 + 6i \updownarrow 14i \updownarrow 4i^2$$

$$\rightarrow\ z(2-3i) = 1-8i\ \rightarrow\ z = \frac{1-8i}{2-3i} = \frac{(1-8i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2-16i+3i-24i^2}{4-9i^2} = \frac{26-13i}{13}\ \rightarrow$$

$$\rightarrow z = 2 \updownarrow i$$

$$w = 7 + 2i \updownarrow 2\,(2 \updownarrow i) = 7 + 2i \updownarrow 4 + 2i = 3 + 4i$$

La solución buscada es $z = 2 \updownarrow i;\ w = 3 + 4i$.